CALCULANDO A ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM POLINÔMIO DE SEGUNDO GRAU

CALCULATING THE AREA BOUNDED BY A SECOND DEGREE POLYNOMIAL

Autores: Luan KRÜGER, João Gabriel SCHONROCK, Adriano Rodrigues de MELO.
Identificação autores: Bolsista PIBIC-EM/CNPq do Curso Técnico em Química Integrado ao Ensino Médio; Colaborador Discente do Curso Técnico em Química Integrado ao Ensino Médio; Orientador IFC-Campus Araquari.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma construção intuitiva e geométrica do conceito de integral. Intuitiva por que não há apresentação de definições ou teoremas. Para isso, considerou-se o problema de se obter a área da região delimitada por uma superfície curva, a parábola, e a técnica conhecida como método da exaustão, precursora do Cálculo Integral. Ao final, demonstrou-se sua aplicação na obtenção da variação da entalpia para uma dada reação química. Conclui-se que o objeto de estudo é acessível a nível intuitivo e contribui com elementos importantes para o aprendizado de matemática, como a ideia de infinito e continuidade.

Palavras-chave: Método da Exaustão; Entalpia; Reação Química.

ABSTRACT

This paper aims to present an intuitive and geometric construction of the integral concept. Intuitive because there is no presentation of definitions or theorems. For this purpose, the technique known as the method of exhaustion was used to solve the problem of obtaining the area of the region delimited by a curved surface. The enthalpy change for a given chemical reaction was obtained by the deduced formula. It is concluded that the object of study is accessible at an intuitive level and it contributes with important elements to learning math, like the idea of infinity and continuity.

Keywords: Method of Exhaustion; Enthalpy; Chemical Reaction.

INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O problema da comparação de configurações curvas e retilíneas remonta ao tempo de Eudoxo de Cnido (355 a.C.) e se apresenta como um prelúdio para o Cálculo Itegral. Arquimedes de Siracusa (287 a.C.) foi quem primeiro obteve sucesso ao confrontar o problema de se determinar a área da região delimitada por um segmento de parábola (BOYER, 1974, pp. 67-95). Como é comum em matemática, esse conhecimento que, de nada tem a ver com a prática cotidiana ou qualquer relação com a natureza física, logo se difundiria por todos os ramos das ciências.

A problema de estudo, em linguagem moderna, é de simples entendimento: dado um polinômio de segundo grau, determinar a área da região delimitada por sua curva, a parábola, o eixo das abscissas e duas retas distintas ortogonais a esse eixo. Sua solução, com a ferramenta consolidada do Cálculo Integral é também simples (LEITHOLD, 1994; STEWART, 2013), porém, impressiona o fato de que uma abordagem intuitiva possa ser desenvolvida (a mesma intuição que uma vez Eudoxo e Euclides tiveram!).

Nestes termos, este trabalho pretende apresentar uma dedução intuitiva da fórmula que fornece a área da região já mensionada e fornecer, além disso, uma aplicação da mesma no contexto da físico-química.

METODOLOGIA

Nos termos de Marconi e Lakatos (2003, p. 91), o desenvolvimento deste trabalho é dado via método de abordagem dedutiva. No que concerne aos objetivos, classifica-se esta pesquisa em explicativa (GIL, 2002, p. 42), visto que o foco está na compreensão dos processos que determinam a expressão para àquela área/região em estudo. Das condições e hipóteses do problema em estudo, emergem conceitos que necessitam de revisão prévia, como os conceitos de funções de segundo grau, notação de somatório e áreas de superfícies. Por essa razão, no que tange ao procedimento técnico, a mesma se classifica em pesquisa bibliográfica (GIL, 2002, p. 44), já em relação à abordagem, a mesma se configura em quantitativa, visto que o objetivo é quantificar a grandeza área, ao mesmo tempo que se quantifica uma grandeza físico-química.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após uma breve revisão acerca da estrutura geométrica e algébrica da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{para } a \neq 0, \tag{1}$$

fêz-se um estudo introdutório sobre a notação Σ de somatório e suas propriedades básicas. Para a prática deste conceito, foram realizados estudos sobre o somatório de alguns monômios, como

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \tag{2}$$

observando que os mesmos convergem para somas bem definidas (STEWART, 2013).

Deparou-se por fim, com o problema de se obter a fórmula da área da região delimitada por uma parábola no intervalo $[p, q]$, o eixo das abscissas e as retas paralelas ao eixo das ordenadas passando por p e q. O primeiro passo foi aproximar a região por meio de retângulos internos (aproximação por falta), conforme Figura 1.

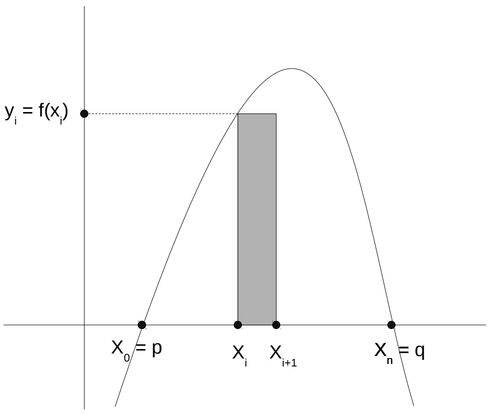

Figura 1 – Aproximação da região contínua em regiões retângulares interiores (aproximação por falta).

Assim, uma área aproximada $S \approx \sum A_i$ pôde ser obtida, em que A_i é a área do i-ésino retângulo interno. Dois detalhes sutis e importantes para prosseguir são: i) perceber que quanto mais retângulos se utilizam, mais próximo se torna a área aproximada da área real; e ii) que expressões na forma $k/x, k/x^2, k/x^3, \cdots$, para k constante, se tornam muito pequenas quando x é um número muito grande (ver Tabela 1).

Tabela 1 – Comportamento da função $1/x$, isto é, com $k = 1$, quando x cresce progressivamente.

x	1	10	100	1.000	10.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000
$1/x$	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$	$0,000001$	$0,0000001$

Diante dessas observações, utilizou-se da intuição para conjecturar que se fosse possível inserir infinitos retângulos internos à curva, então seria possível obter a área exata, ao passo que, no infinito, termos como k/x^n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, e k constante, poderiam ser considerados nulos e, por tanto, poderiam ser excluídos da fórmula. Este é o raciocínio conhecido como método da exaustão, pois são inseridos polígonos regulares exaustivamente no interior da região desejada, e que culminou com a obtenção da fórmula da área desejada:

$$S(p,q) = a\frac{(q^3 - p^3)}{3} + b\frac{(q^2 - p^2)}{2} + c(q - p). \tag{3}$$

A última atividade do trabalho se concentrou na aplicação da fórmula. Em consulta feita aos professores do curso técnico em química integrado ao ensino médio, chegou-se no problema da variação de entalpia[1] ΔH^0, para uma reação química com temperatura diferente da temperatura padrão ($T_0 = 298$ K). De fato, se o intervalo de temperatura $[T_0, T]$ for muito grande, as capacidades caloríficas C_p da reação poderão ser tomadas em função da temperatura t, o que para muitas substâncias, essa função assume a forma polinomial, de modo que a variação da entalpia a uma temperatura T, com notação adaptada de Castellan (2007, p. 144) a partir da equação (3), toma a forma:

$$\Delta H_T^0 = \Delta H_{T_0}^0 + S(T_0, T), \tag{4}$$

em que $S(T_0, T)$ é a área da região delimitada pelo polinômio $\Delta C_p^0(t)$ (aqui de segundo grau), pelo eixo das abscissas e pelas retas paralelas ao eixo das ordenadas passando por T_0 e T.

Considere, como exemplo, o problema de se calcular a entalpia ΔH^0, à 1.000^{o} C $=$ 1.273 K, da reação

$$H_2(g) + Cl_2(g) \longrightarrow 2HCl(g). \tag{5}$$

Sabendo que a entalpia no estado inicial é conhecida: $\Delta H_{298}^0 = -92,312$ kJ/mol, começa-se por obter a expressão de $\Delta C_p^0(t)$ (detalhes em Castellan (2007, p. 144)),

$$\Delta C_p^0(t) = R\left(3,079 \times 10^{-7}t^2 - 0,3421 \times 10^{-3}t - 0,2664\right). \tag{6}$$

[1] Conceito ligado à termodinâmica que seve para nomear a quantidade de energia presente nas substâncias e que pode ser alterada mediante reações químicas.

Em seguida, calcula-se $S(298, 1.273)$ conforme equação (3), obtendo-se:

$$
\begin{aligned}
S(298, 1.273) &= R\left[3,079 \times 10^{-7}\frac{(1.273^3 - 298^3)}{3} - 0,3421 \times 10^{-3}\frac{(1.273^2 - 298^2)}{2}\right. \\
&\quad \left. -0,2664(1.273 - 298)\right], \\
&= -2,600 \text{ kJ/mol}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Então, a variação da entalpia da reação para a temperatura em $T = 1.273K$ será

$$\Delta H^0_{1.273} = -92,312 \text{ kJ/mol} - 2,600 \text{ kJ/mol} = -94,912 \text{ kJ/mol}. \qquad (8)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou construir o conceito de Integral a partir de um contexo geométrico e intuitivo: a área da região delimitada por uma curva. Uma questão não abordada no trabalho é a compreensão estrutural da equação (4), isto é, quais são as condições e o raciocínio para sua dedução? Uma compreensão detalhada do seu desenvolvimento poderia colaborar para a conexão entre o cálculo de área e a aplicação em estudo.

Os autores aproveitam a oportunidade para registrar agradecimentos ao professor Júlio Lopes da Silva Jr. pelo auxílio na escolha do problema de aplicação, bem como ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro que contribuiu para a realização do projeto.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

CASTELLAN, G. *Fundamentos de Físico-Química*. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.

LEITHOLD, L. *O Cálculo Com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: HARBRA ltda, 1994. v. 1.

MARCONI, M. d. A.; LAKATOS, E. M. *Fundamentos de Metodologia Científica*. São Paulo: Atlas, 2003.

STEWART, J. *Cálculo Volume I*. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.